

Nom de famille (naissance) :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse/époux)

SANTINI

Prénom(s) :

DIDIER

N° d'inscription :

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen :

Section/S spécialité/Série :

Epreuve :

Matière :

Session :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Olympiades 2022

Exercice 1

1.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400

2.

a. Pour $(7; 24)$:

7 est bien impair

On a bien $7 < 24$

$$\text{Et } 7^2 + 24^2 = 625 = 25^2$$

C'est donc bien un supercarré d'ordre 2.

b.

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$$

$$\text{Or } 2n + 1 \leq 9$$

$$\Rightarrow n \leq 4$$

$(3; 4)$ est le seul supercarré d'ordre 2 possible avec 3 car dans les autres cas, l'écart entre x_2^2 et $(x_2+1)^2$ est supérieur à 3^2 : la somme des carrés du couple n'atteindra pas le prochain carré parfait et donc ne vérifierait pas la 3^e condition.

N°

1/6

c. Soit c un carré parfait :

Il faut vérifier, pour obtenir un couple supercarré :

$$\begin{aligned} 5^2 + a^2 &= c \\ \Rightarrow a &= \sqrt{c - 25} \end{aligned}$$

On trouve donc un carré parfait tel que celui-ci moins 25 soit aussi un carré parfait.

$$\text{Or } (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$$

$$\text{On résout } 2a+1 = 25$$

$$\Rightarrow a = 12$$

D'où $(5, 12)$ est un couple supercarré.

Similairement, $(13, 84)$ est un couple supercarré.

d.

Si un triangle a deux côtés adjacents à l'angle droit de longueurs correspondantes à un couple supercarré, alors d'après le théorème de Pythagore, l'hypothénuse aura une longueur entière.

3.

Avec $(5, 12, 84)$:

On a $n = 3 \geq 2$

$n_1 = 5$ donc impair

On a bien $5 < 12 < 84$

Et $5^2 + 12^2 + 84^2 = 7225 = 85^2$ donc la somme est égale à un carré parfait.

$(5, 12, 84)$ remplit les conditions, c'est bien un supercarré d'ordre 3.

4. $(3, 4, 5, 7, 49)$ remplit les conditions d'un supercarré d'ordre 5.

5.

On veut que :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 48984^2 = 48985^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 48985^2 - 48984^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 97969$$

$$\Rightarrow x_1 = \sqrt{97969 - x_2^2 - x_3^2}$$

Il faut donc $x_2^2 + x_3^2 + 87969 = x_2^2 + x_3^2 + 313^2$ carré parfait

On se retrouve à chercher un supercarré d'ordre 3 : $(x_2, x_3, 313)$

On résout donc $x_2^2 + x_3^2 + 313^2 = 314^2$

$$\Rightarrow x_2^2 + x_3^2 = 627$$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{627 - x_3^2}$$

On résout donc

$$x_3^2 +$$

Il faut donc trouver x_2 et x_3 tq $627 - x_3^2$ soit carré parfait.

Cela revient à chercher (x_2, x_3, x_4) avec $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 313^2$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{313^2 - x_3^2 - x_4^2}$$

Soit le couple supercarré $(x_4, 48984)$

On a donc $x_4 = \sqrt{48984^2 - 48985^2}$
 $= \sqrt{97969}$
 $= 313$

Maintenant prenons le couple supercarré $(x_5, 312)$

Il faut donc $x_5^2 + 312^2 = 313^2$

$$\Rightarrow x_5 = \sqrt{313^2 - 312^2}$$

$$= 25$$

Maintenant prenons le couple supercarré $(x_6, 24)$

Il faut donc $x_6^2 + 24^2 = 25^2$

$$\Rightarrow x_6 = \sqrt{25^2 - 24^2}$$

$$= 7$$

On a donc :

$$313^2 + 48984^2 = 48985^2$$

$$25^2 + 312^2 + 48984^2 = 48985^2$$

$$7^2 + 24^2 + 312^2 + 48984^2 = 48985^2$$

Un supériorité de forme $(x_1, x_2, x_3, 48984)$ est donc :

$$(7, 24, 312, 48984)$$

En l'occurrence, la valeur de x_1 est 7.

Nom de famille (naissance) :
(Suivi, s'il y a lieu, du nom d'épouse/époux)

S A N T I N I

Prénom(s) :

D I D I E R

N° d'inscription :

Né(e) le :

(Le numéro est celui qui figure sur la convocation ou la feuille d'émargement)

(Remplir cette partie à l'aide de la notice)

Concours / Examen :

Section/Specialité/Série :

Epreuve :

Matière :

Session :

CONSIGNES

- Remplir soigneusement, sur CHAQUE feuille officielle, la zone d'identification en MAJUSCULES.
- Ne pas signer la composition et ne pas y apporter de signe distinctif pouvant indiquer sa provenance.
- Numéroté chaque PAGE (cadre en bas à droite de la page) et placer les feuilles dans le bon sens et dans l'ordre.
- Rédiger avec un stylo à encre foncée (bleue ou noire) et ne pas utiliser de stylo plume à encre claire.
- N'effectuer aucun collage ou découpage de sujets ou de feuille officielle. Ne joindre aucun brouillon.

Exercice 2

1.

a. Si l'on soustrait tous les impairs inférieurs à 500 avec tous les pairs inférieurs ou égaux à 500 deux à deux :

$$\begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad \dots \quad 499 \\
 - 2 \quad 4 \quad 6 \quad 8 \quad \dots \quad 500 \\
 \hline
 -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad \dots \quad -1
 \end{array}$$

Cette soustraction a pour résultat $(-1) \times \frac{499-1}{2} = -249$

La première moitié de A moins celle de B fait donc -249

On fait de même pour les secondes moitiés :

$$\begin{array}{r}
 502 \quad 504 \quad 506 \quad \dots \quad 998 \quad 1000 \\
 - 501 \quad 503 \quad 505 \quad \dots \quad 997 \quad 999 \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1
 \end{array}$$

Cette soustraction a donc pour résultat $1 \times \frac{1000-502}{2} = 249$

Finalement, la somme des A moins celles des B fait 0.

Ces sous-ensembles ont donc la même somme de valeurs.

b.

La somme que doit faire le tout est : $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1000 \times 1001}{2} = 500500$
 Chaque ensemble a donc une somme égale à $\frac{500500}{2} = 250250$

$$\text{Or } \sum_{n=8}^{707} n = \sum_{n=0}^{707} n - \sum_{n=0}^7 n = \frac{707 \times 708}{2} - \frac{7 \times 8}{2} = 250250$$

On peut donc faire $\begin{cases} A = \{8, 9, 10, 11 \dots 707\} \\ B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 708 \dots 1000\} \end{cases}$

2.

a. Alternances ≥ 4

Cas 1: Alternances "longues" de plus d'une valeur

A x_1

B 0

$$\begin{array}{c} x_3 \text{ et } x_4 \\ \hline \frac{x_3 + x_4}{2} \end{array}$$

1000

Avec 4 ou plus alternances "longues", on pourra toujours choisir x_0 et x_1 tels que :

$\begin{cases} x_1 + x_2 \text{ soit impair (possible car alternances "longues")} \\ \text{Il existe } x_3 \text{ et } x_4 \text{ tq } x_3 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_4 \text{ puisqu'il y aura toujours} \\ \text{un intervalle de B entre des} \\ \text{intervalles de A et vice versa} \\ \text{et tq } \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad (\Rightarrow x_3 + x_4 = x_1 + x_2) \end{cases}$

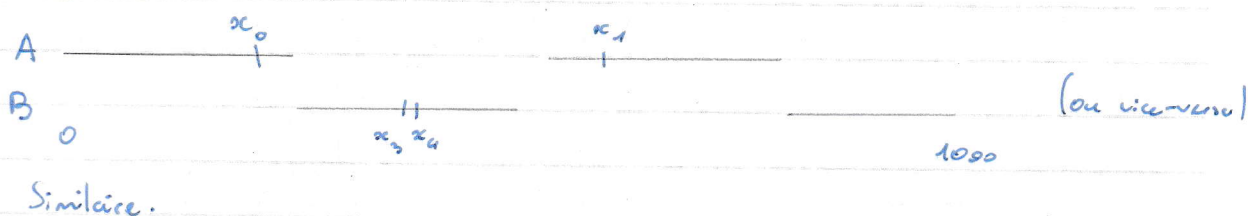
Cas 2: alternances "courtes" d'une valeur

A $x_1 \quad \frac{x_1 + x_2}{2} \quad x_2$
 B $x_3 \quad x_4$

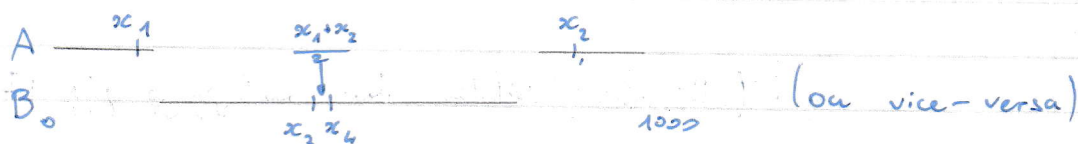
Très similaire aux alternances longues. Cette fois, il faut choisir x_1 et x_2 tels que $x_1 + x_2$ soit pair donc $\frac{x_1 + x_2}{2}$ entier.

(Il y aura toujours une manière de choisir x_1 et x_2 de même parité puisqu'il y a au moins 3 éléments dans chacun des sous-ensembles sinon la somme ne pourrait pas faire 250250)

b. Alternances = 3



c. Alternances = 2



Similaire. Il y aura toujours l'un des deux ensembles entre les deux autres pour qu'il y ait 2 alternances.

d. 1 alternance :

$$\text{Il faudrait trouver } n \text{ tq } \frac{n(n+1)}{2} = 250250$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 500500$$

$$\text{Or } 706^2 + 706 < 500500 < 707^2 + 707$$

Il est impossible de vérifier la condition avec 1 alternance.

Donc pour les alternances supérieures à 4, égales à 3 et à 2, Clara a raison.

Elle a donc toujours raison.